28　定積分で表された関数(2)

基本問題 & 解法のポイント

48

$f'(x)=\cos x+\cos 2x=\cos x-1+2\cos^2 x=(2\cos x-1)(\cos x+1)$ より，
$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	/
$f(x)$		↑	極大	↓		↓	極小	↑	

これと $f(x)=\int_0^x(\cos t+\cos 2t)dt=\left[\sin t+\dfrac{\sin 2t}{2}\right]_0^x=\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}$ より，

極大値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，極小値は $f\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

49

(1)

$g(t)=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$ の原始関数を $G(t)$ とすると，$F(x)=\int_{-x}^x g(t)dt=G(x)-G(-x)$

よって，

$$
\begin{aligned}
F'(x)&=\{G(x)-G(-x)\}'\\
&=g(x)+g'(-x)\\
&=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\\
&=\cos x\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^{-x}}\right)\\
&=\cos x\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{e^x+1}\right)\\
&=\cos x
\end{aligned}
$$

(2)

積分定数を C とすると，(1)より，$F(x)=\int\cos x dx=\sin x+C$

よって，$F(0)=C$

これと $F(0)=\int_0^0\dfrac{\cos t}{1+e^t}dt=0$ より，$C=0$

ゆえに，$F(x)=\sin x$

A

166

(1)

$\int_x^0 tf(x-t)dt$ について，$x-t=u$ とおくと，$dt=-du,\ t=0 \Leftrightarrow u=x,\ t=x \Leftrightarrow u=0$ より，

$$\int_x^0 tf(x-t)dt=-\int_0^x (x-u)f(u)du$$
$$=-x\int_0^x f(u)du+\int_0^x uf(u)du$$

よって，$F(x)=-\frac{x}{2}-x\int_0^x f(u)du+\int_0^x uf(u)du$

したがって，

$$F'(x)=-\frac{1}{2}-\int_0^x f(u)du-xf(x)+xf(x)$$
$$=-\frac{1}{2}-\int_0^x f(u)du$$

これより，$F''(x)=-f(x)$

$F''(x)=\cos x$ だから，$f(x)=-\cos x$　・・・(答)

これを $F(x)=-\frac{x}{2}-x\int_0^x f(u)du+\int_0^x uf(u)du$ に代入すると，

$$F(x)=-\frac{x}{2}+x\int_0^x \cos u du-\int_0^x u\cos u du$$
$$=-\frac{x}{2}+x[\sin u]_0^x-[u\sin u]_0^x+\int_0^x \sin u du$$
$$=-\frac{x}{2}+x\sin x-x\sin x-[\cos u]_0^x$$
$$=-\frac{x}{2}-\cos x+1$$

$\therefore F(x)=-\cos x-\frac{x}{2}+1$　・・・(答)

または，

$$F'(x)=-\frac{1}{2}+\int_0^x \cos u du$$
$$=-\frac{1}{2}+\sin x$$

よって，積分定数を C とすると，

$$F(x)=-\frac{1}{2}x-\cos x+C$$

$F(x)=-\dfrac{x}{2}-x\displaystyle\int_0^x f(u)du+\int_0^x uf(u)du$ より，$F(0)=0$

一方，$F(x)=-\dfrac{1}{2}x-\cos x+C$ において，$F(0)=-1+C$

よって，$C=1$ ゆえに，$F(x)=-\cos x-\dfrac{x}{2}+1$ ・・・(答)

(2)

$F'(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ における $F(x)$ の増減は次のようになる。

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$F'(x)$	/	$-$	0	$+$	/
$F(x)$	$\dfrac{\pi}{4}+1$	↓	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}+1$	↑	$-\dfrac{\pi}{4}+1$

よって，$F(x)$ は，$-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において，

$x=-\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $\dfrac{\pi}{4}+1$ を，$x=\dfrac{\pi}{6}$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}+1$ をとる。

167

(1) 略解

$t=\tan\theta$ とおくと，$f(1)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\dfrac{\pi}{4}$

(2)

$\dfrac{1}{x}=u$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
g'(x)&=f'\left(\frac{1}{x}\right)\\
&=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\
&=\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{-1}{x^2}\\
&=-\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\cdot\frac{1}{x^2}\\
&=-\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

よって，$f'(x)+g'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)=0$

これより，$f(x)+g(x)=C$ （C は定数）

また，$g(1)=f(1)=\dfrac{\pi}{4}$ より，$f(1)+g(1)=\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに，$f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$

(3)

$f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{x\to\infty} f(x) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\pi}{2}-g(x)\right\} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\pi}{2}-f\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}-f(0) \\
&= \frac{\pi}{2}-0 \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(4)

$$\lim_{x\to\infty} x\{\alpha-f(x)\}=\lim_{x\to\infty} x\left\{\frac{\pi}{2}-f(x)\right\}$$

ここで $\dfrac{1}{x}=u$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\{\alpha-f(x)\} &= \lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{2}-f\left(\dfrac{1}{u}\right)}{u} \\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{2}-g(u)}{u} \\
&= \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} \\
&= \lim_{u\to 0}\frac{f(u)-f(0)}{u-0} \\
&= f'(0) \\
&= \frac{1}{0^2+1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

168

(1)

$$f'(x)=(n+1)x^ne^{-x}-x^{n+1}e^{-x}$$
$$=x^ne^{-x}(n+1-x)$$

より，$f(x)$ の $x\geq 0$ における増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$n+1$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↑	極大	↓

よって，最大値は $f(n+1)=(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}=\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

(2)

(1)より，$0<x^{n+1}e^{-x}\leq\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

よって，$0<x^ne^{-x}\leq\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ だから，

はさみうちの原理の原理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0$

(3)

$g_n(x)=\displaystyle\int_0^x t^ne^{-t}dt$ とおくと，

$$g_n(x)=\int_0^x t^ne^{-t}dt$$
$$=\left[-t^ne^{-t}\right]_0^x+n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$$
$$=-x^ne^{-x}+ng_{n-1}(x)$$

よって，

$$g_n(x)=-x^ne^{-x}+ng_{n-1}(x)$$
$$=-x^ne^{-x}-nx^{n-1}e^{-x}-n(n-1)x^{n-2}-\cdots-n(n-1)\cdot\cdots\cdot3x^2e^{-x}+n(n-1)\cdot\cdots\cdot2g_1(x)$$
$$=-x^ne^{-x}-nx^{n-1}e^{-x}-n(n-1)x^{n-2}-\cdots-n(n-1)\cdot\cdots\cdot3x^2e^{-x}+n(n-1)\cdot\cdots\cdot2\int_0^x te^{-t}dt$$
$$=-x^ne^{-x}-nx^{n-1}e^{-x}-n(n-1)x^{n-2}-\cdots-n(n-1)\cdot\cdots\cdot3x^2e^{-x}$$
$$+n(n-1)\cdot\cdots\cdot2\left(\left[-te^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt\right)$$
$$=-x^ne^{-x}-nx^{n-1}e^{-x}-n(n-1)x^{n-2}-\cdots-n(n-1)\cdot\cdots\cdot3x^2e^{-x}-n(n-1)\cdot\cdots\cdot2xe^{-x}$$
$$+n!\left(-e^{-x}+1\right)$$

ここで，(2)より， $\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0$ （m は自然数）

また， $\lim_{x\to\infty}\left(-e^{-x}+1\right)=1$

よって， $\lim_{x\to\infty} g_n(x) = n!$

ゆえに，すべての自然数 n に対して $\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^n e^{-t}dt = n!$ が成り立つ。

B

169

(1)

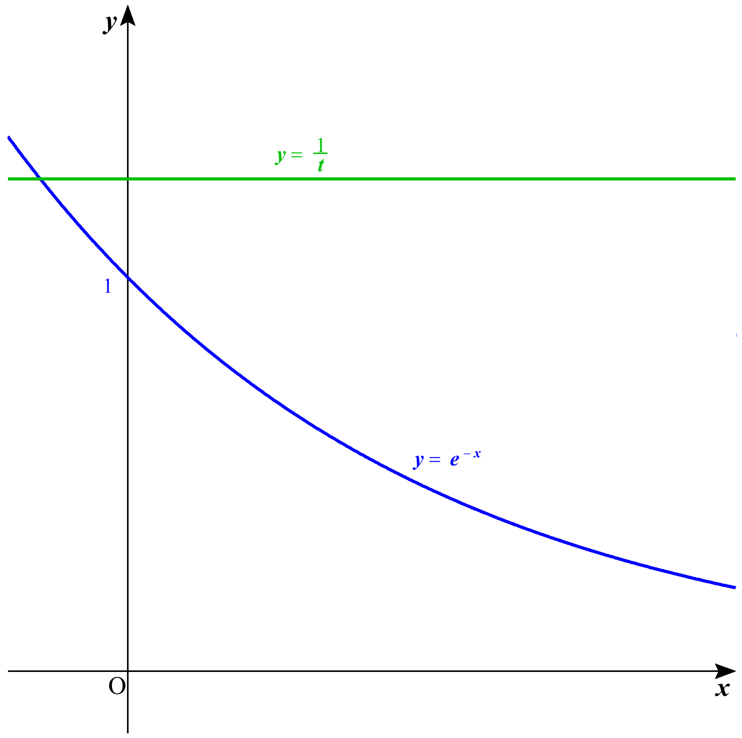
積分区間$[0,\ a]$において$e^{-x} \leq 1$だから，

$\dfrac{1}{t} \geq 1$すなわち$0 < t \leq 1$のとき

$$S(a,\ t) = \int_0^a \left(\frac{1}{t} - e^{-x}\right) dx$$
$$= \left[\frac{x}{t} + e^{-x}\right]_0^a$$
$$= \frac{a}{t} + e^{-a} - 1$$

$$\therefore S'(a,\ t) = -\frac{a}{t^2} < 0$$

ゆえに，$S(a,\ t)$は単調に減少する。　・・・①



$0<\frac{1}{t}<1$　すなわち　$1<t$ のとき

$e^{-x}=t$ すなわち $x=\log t$ となる x が存在する。

これと e^{-x} が単調に減少することから，

$\log t<a$　すなわち　$1<t<e^{a}$ のとき

$$S(a,\ t)=\int_{\log t}^{a}\left(\frac{1}{t}-e^{-x}\right)dx+\int_{0}^{\log t}\left(-\frac{1}{t}+e^{-x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x}{t}+e^{-x}\right]_{\log t}^{a}+\left[\frac{x}{t}+e^{-x}\right]_{\log t}^{0}$$

$$=\frac{a}{t}+e^{-a}-\frac{\log t}{t}-e^{-\log t}+1-\frac{\log t}{t}-e^{-\log t}$$

$$=\frac{a}{t}-\frac{2\log t}{t}-2e^{\log\frac{1}{t}}+e^{-a}+1$$

$$=\frac{a}{t}-\frac{2\log t}{t}-\frac{2}{t}+e^{-a}+1$$

$$=\frac{a-2-2\log t}{t}+e^{-a}+1$$

$$\therefore S'(a,\ t)=\frac{-2-a+2+2\log t}{t^2}=\frac{2\log t-a}{t^2}$$

したがって，増減は次のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	e^{a}
$S'(a,\ t)$	/	$-$	0	$+$	/
$S(a,\ t)$	/	↓	極小	↑	/

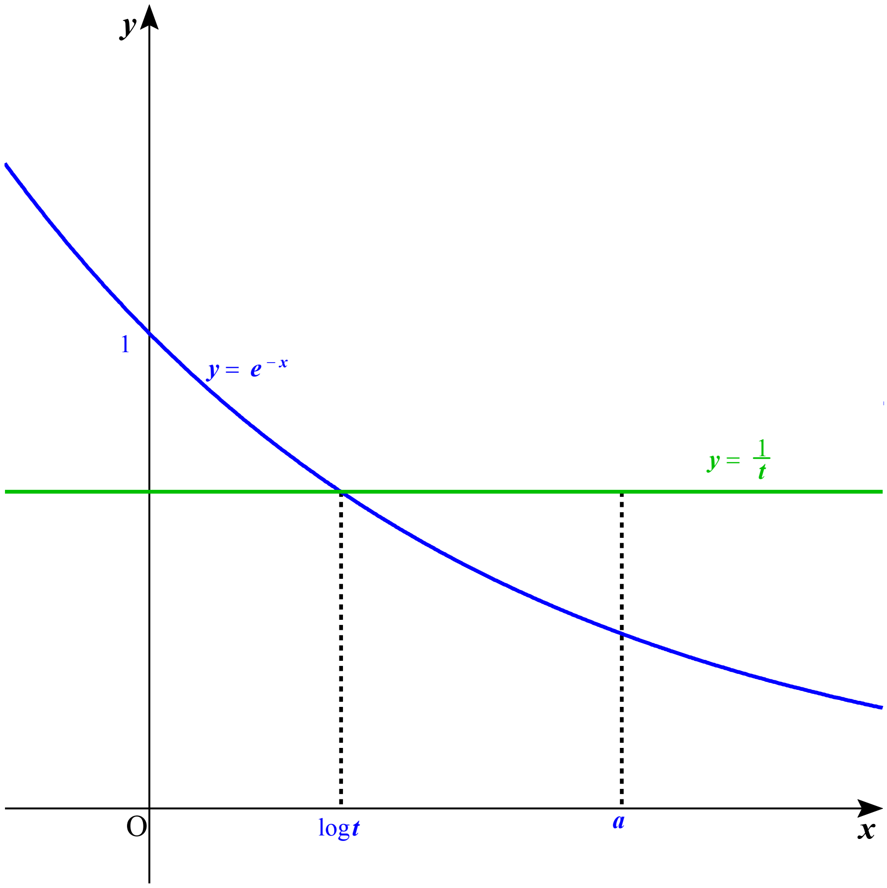
ゆえに，$t=e^{\frac{a}{2}}$ のとき $S(a,\ t)$ は極小となり，

その値は

$$S\left(a,\ e^{\frac{a}{2}}\right)=\frac{a-2-2\log e^{\frac{a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}}}+e^{-a}+1$$

$$=-2e^{-\frac{a}{2}}+e^{-a}+1$$

$$=\left(e^{-\frac{a}{2}}-1\right)^2$$



$a < \log t$，すなわち $t > e^a$ のとき

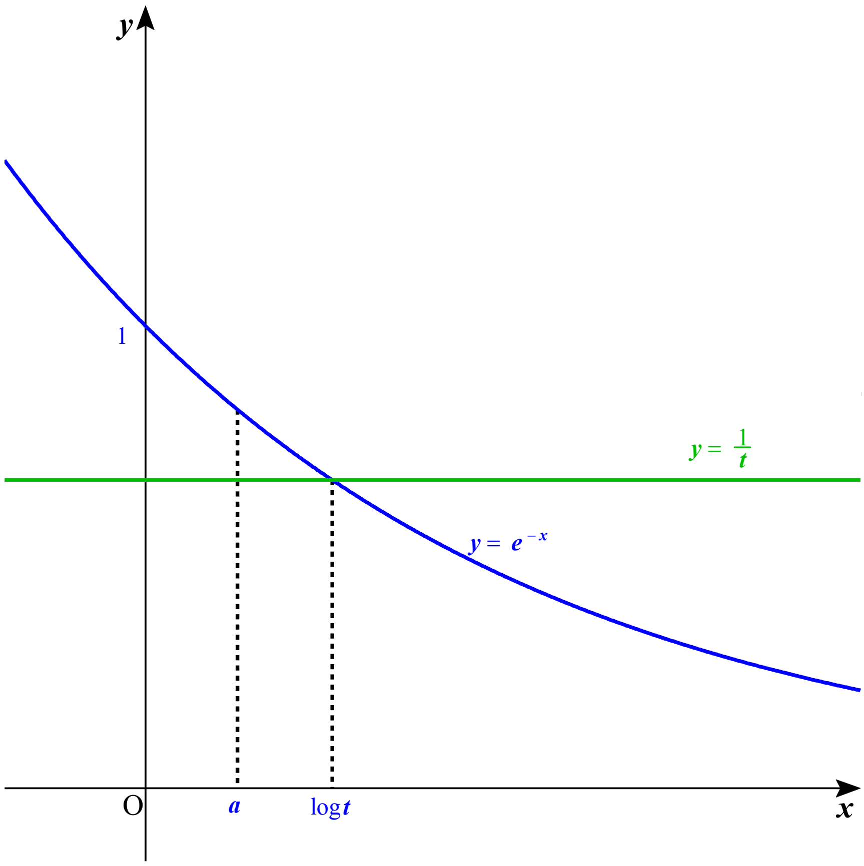
$$S(a,\ t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx$$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{x}{t}\right]_0^a$$

$$= -e^{-a} - \frac{a}{t} + 1$$

$$\therefore S'(a,\ t) = \frac{a}{t^2} > 0$$

ゆえに，$S(a,\ t)$ は単調に増加する。　・・・②



$S(a,\,t)$は連続であることと①，②より，$t = e^{\frac{a}{2}}$ のとき $S(a,\,t)$は最小となる。

ゆえに，$m(a) = \left(e^{-\frac{a}{2}} - 1\right)^2$

(2)

$$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2$$

ここで，$f(a) = e^{-\frac{a}{2}} - 1$ とおくと，$f'(a) = -\dfrac{e^{-\frac{a}{2}}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2} &= \lim_{a\to 0}\left(\frac{f(a) - f(0)}{a - 0}\right)^2 \\ &= \{f'(0)\}^2 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

170

(1)

$$f_1(x)=\int_{-x}^{x} f_0(t)dt + f_0'(x)$$
$$=\int_{-x}^{x} te^t dt + \left(xe^x\right)'$$
$$=\left[te^t\right]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} e^t dt + e^x + xe^x$$
$$=xe^x + xe^{-x} - \left[e^t\right]_{-x}^{x} + xe^x + e^x$$
$$=xe^x + xe^{-x} - e^x + e^{-x} + xe^x + e^x$$
$$=2xe^x + (x+1)e^{-x}$$

(2)

$$g(-x)=\int_{x}^{-x} (at+b)e^t dt$$
$$=-\int_{-x}^{x} (at+b)e^t dt$$
$$=-g(x)$$

より，$g(x)$は奇関数である。

よって，$\int_{-c}^{c} g(x)dx = 0$

(3)

$$f_{2n}(x)=\int_{-x}^{x} f_{2n-1}(t)dt + f_{2n-1}'(x)$$
$$=\int_{-x}^{x}\left(\int_{-t}^{t} f_{2(n-1)}(u)du + f_{2(n-1)}'(t)\right)dt + f_{2n-1}'(x)$$
$$=\int_{-x}^{x}\left(\int_{-t}^{t} f_{2(n-1)}(u)du\right)dt + \int_{-x}^{x} f_{2(n-1)}'(t)dt + f_{2n-1}'(x)$$
$$=\int_{-x}^{x}\left(\int_{-t}^{t} f_{2(n-1)}(u)du\right)dt + f_{2(n-1)}(x) - f_{2(n-1)}(-x) + f_{2n+1}'(x)$$

ここで，(2)と同様にして，$\int_{-x}^{x}\left(\int_{-t}^{t} f_{2(n-1)}(u)du\right)dt = 0$

また，$f_{2n-1}(x)=\int_{-x}^{x} f_{2(n-1)}(t)dt + f_{2(n-1)}'(x)$ より，

$$f_{2n-1}'(x)=\left(\int_{-x}^{x} f_{2(n-1)}(t)dt + f_{2(n-1)}'(x)\right)'$$
$$=f_{2(n-1)}(x) + f_{2(n-1)}(-x) + f_{2(n-1)}''(x)$$

よって，$f_{2n}(x)=2f_{2(n-1)}(x) + f_{2(n-1)}{}''(x)$　・・・①

①より，

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= 2f_0(x) + f_0''(x) \\
&= 2xe^x + \left(xe^x\right)'' \\
&= 2xe^x + \left\{(x+1)e^x\right\}' \\
&= 2xe^x + (x+1)e^x + e^x \\
&= (3x+2)e^x
\end{aligned}
$$

そこで，$f_{2n}(x) = (a_n x + b_n)e^x$ ・・・② とおくと，

$a_1 = 3$ ・・・③ $b_1 = 2$ ・・・④

また，①より，

$$
\begin{aligned}
f_{2n}(x) &= 2(a_{n-1}x + b_{n-1})e^x + \left\{(a_{n-1}x + b_{n-1})e^x\right\}' \\
&= (2a_{n-1}x + 2b_{n-1})e^x + \left\{(a_{n-1}x + a_{n-1} + b_{n-1})e^x\right\}' \\
&= (2a_{n-1}x + 2b_{n-1})e^x + (a_{n-1}x + 2a_{n-1} + b_{n-1})e^x \\
&= (3a_{n-1}x + 2a_{n-1} + 3b_{n-1})e^x
\end{aligned}
$$

これと，②より，$a_n = 3a_{n-1}$ ・・・⑤ $b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$ ・・・⑥

したがって，③と⑤より，$a_n = 3^n$ ・・・⑦

また，⑥と⑦より，$b_n = 2\cdot 3^{n-1} + 3b_{n-1}$ であり，

この両辺を3^nで割り，整理すると，$\dfrac{b_n}{3^n} - \dfrac{b_{n-1}}{3^{n-1}} = \dfrac{2}{3}$

したがって，$\dfrac{b_n}{3^n}$は初項$\dfrac{b_1}{3}$，公差$\dfrac{2}{3}$の等差数列である。

これと③より，$\dfrac{b_n}{3^n} = \dfrac{2}{3} + (n-1)\cdot\dfrac{2}{3}$ $\therefore b_n = 2n\cdot 3^{n-1}$ ・・・⑧

②，⑦，⑧より，

$$
\begin{aligned}
f_{2n}(x) &= \left(3^n x + 2n\cdot 3^{n-1}\right)e^x \\
&= 3^{n-1}(3x+2n)e^x
\end{aligned}
$$

補足 1

$h_n(t) = \int_{-t}^{t} f_n(u)du$ とすると，

$h(-t) = \int_{t}^{-t} f_n(u)du = -\int_{-t}^{t} f_n(u)du = h_n(t)$ より，$h_n(t)$は奇関数

よって，$\int_{-x}^{x} h(t)dt = 0$ $\therefore \int_{-x}^{x}\left(\int_{-t}^{t} f_{2(n-1)}(u)du\right)dt = 0$

補足 **2**

$$
\begin{aligned}
f'_{2n-1}(x) &= \left(\int_{-x}^{x} f_{2(n-1)}(t)dt + f'_{2(n-1)}(x)\right)' \\
&= \left(F_{2(n-1)}(x) - F_{2(n-1)}(-x) + f'_{2(n-1)}(x)\right)' \\
&= F'_{2(n-1)}(x) - (-1)\cdot F'_{2(n-1)}(-x) + f''_{2(n-1)}(x) \\
&= f_{2(n-1)}(x) + f_{2(n-1)}(-x) + f''_{2(n-1)}(x)
\end{aligned}
$$